令　和　6　年　度　入　学　者　選　抜　試　験

問題用紙 (工学部 数学Ⅰ・A・Ⅱ・B・Ⅲ)

1　次の問いに答えよ。

(1)　$a_1 = 2$，$a_{n+1} = \dfrac{1}{2}a_n + 3$ で定められる数列 $\{a_n\}$ に対して，$S_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} a_k$ とする。S_n および $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{S_n}{n}$ を求めよ。

(2)　次の定積分を求めよ。
$$\int_0^1 \frac{1}{x^2 + x + 1}\,dx$$

(3)　2 つの箱 A，B があり，A には赤玉 4 個，白玉 1 個，B には赤玉 3 個，白玉 2 個が入っている。A，B から 1 つの箱を選んで玉を 1 個取り出したところ，赤玉であったとして，残りのもう 1 つの箱から玉を 1 個取り出すとき，それが赤玉である確率を求めよ。

2　1 辺の長さが 2 である正四面体 OABC について，辺 AB を $1:2$ に内分する点を D，辺 BC を $3:1$ に内分する点を E とし，線分 AE と 線分 CD の交点を F とする。$\overrightarrow{\mathrm{OA}} = \vec{a}$，$\overrightarrow{\mathrm{OB}} = \vec{b}$，$\overrightarrow{\mathrm{OC}} = \vec{c}$ とするとき，次の問いに答えよ。

(1)　$\overrightarrow{\mathrm{OF}}$ を $\vec{a}$，$\vec{b}$，$\vec{c}$ を用いて表し，大きさ $|\overrightarrow{\mathrm{OF}}|$ を求めよ。

(2)　$\triangle$OAF の面積 S を求めよ。

(3)　辺 OA の中点を M とする。辺 OB 上に点 P を，辺 OC 上に点 Q をとる。$\triangle$MPQ の重心 G が線分 OF 上にあるとき，$\overrightarrow{\mathrm{OG}}$ を $\vec{a}$，$\vec{b}$，$\vec{c}$ を用いて表し，$\triangle$OMG の面積 S' を求めよ。

3　xy 平面上で方程式 $\dfrac{x^2}{9} + \dfrac{y^2}{4} = 1$ で表される曲線を C とする。$0 < \theta < \dfrac{\pi}{2}$ に対し，x 軸上の点 P，y 軸上の点 Q の座標をそれぞれ $\mathrm{P}\left(\dfrac{3}{\cos\theta}, 0\right)$，$\mathrm{Q}\left(0, \dfrac{2}{\sin\theta}\right)$ とする。次の問いに答えよ。

(1)　直線 PQ は曲線 C に接することを示せ。

(2)　原点を O とするとき，$\triangle$OPQ の面積が最小となるような θ の値を求めよ。

(3)　θ を (2) で求めたものとするとき，不等式 $y \geqq 0$ の表す領域で，曲線 C，x 軸，y 軸，および直線 $x = 3\cos\theta$ で囲まれる図形 D の面積を求めよ。

(4)　D を (3) で定めたものとするとき，D を x 軸の周りに 1 回転してできる立体の体積 V を求めよ。

4　t を $-\dfrac{\pi}{2} < t < \dfrac{\pi}{2}$ を満たす実数とする。曲線 $y = 1 + \tan x$ 上の点 $(t, 1 + \tan t)$ における接線と x 軸との交点の x 座標を $f(t)$ とする。関数 $f(t)$ の増減を調べ，極値を求めよ。

受　験　番　号

令和６年度入学者選抜試験　答案用紙　（数学Ⅰ・A・Ⅱ・B・Ⅲその１ ）

1　(1)　$a_{n+1} = \frac{1}{2}a_n + 3$ より，$a_{n+1} - 6 = \frac{1}{2}(a_n - 6)$。数列 $\{a_n - 6\}$ は初項 $a_1 - 6 = -4$，公比 $\frac{1}{2}$ の等比数列なので

$$a_n - 6 = -4\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}, \quad a_n = 6 - 4\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$$

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} a_k = 6n - 4\frac{1-(\frac{1}{2})^n}{1-\frac{1}{2}} = 6n - 8\left(1 - \left(\frac{1}{2}\right)^n\right)$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{S_n}{n} = 6 - \lim_{n\to\infty}\frac{8}{n}\left(1 - \left(\frac{1}{2}\right)^n\right) = 6$$

---

(2)

$$\int_0^1 \frac{1}{x^2+x+1}\,dx = \int_0^1 \frac{1}{\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}}\,dx = \frac{4}{3}\int_0^1 \frac{1}{\left\{\frac{2}{\sqrt{3}}\left(x+\frac{1}{2}\right)\right\}^2+1}\,dx = (*)$$

$t = \frac{2}{\sqrt{3}}\left(x + \frac{1}{2}\right)$ とおくと $\frac{dt}{dx} = \frac{2}{\sqrt{3}}$,　$x : 0 \to 1$ のとき $t : \frac{1}{\sqrt{3}} \to \sqrt{3}$
よって

$$(*) = \frac{4}{3}\int_{\frac{1}{\sqrt{3}}}^{\sqrt{3}} \frac{\sqrt{3}}{2}\frac{1}{t^2+1}\,dt = \frac{2}{\sqrt{3}}\int_{\frac{1}{\sqrt{3}}}^{\sqrt{3}} \frac{1}{t^2+1}\,dt = (**)$$

$t = \tan\theta$ とおくと $\frac{1}{t^2+1} = \frac{1}{\tan^2\theta+1} = \cos^2\theta$,　$\frac{dt}{d\theta} = \frac{1}{\cos^2\theta}$
$t : \frac{1}{\sqrt{3}} \to \sqrt{3}$ のとき $\theta : \frac{\pi}{6} \to \frac{\pi}{3}$
よって

$$(**) = \frac{2}{\sqrt{3}}\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} 1\,d\theta = \frac{2}{\sqrt{3}}[\theta]_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} = \frac{2}{\sqrt{3}}\left(\frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{6}\right) = \frac{2}{\sqrt{3}}\cdot\frac{\pi}{6} = \frac{\pi}{3\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{9}\pi$$

---

(3)　選んだ箱を第一の箱，残りの箱を第二の箱と呼ぶことにする。第一の箱から取り出した玉が赤玉であるという事象を R_1，第二の箱から取り出した玉が赤玉であるという事象を R_2 とする。
第一の箱から赤玉を取り出す確率 $P(R_1)$ は，この第一の箱が A，B それぞれの場合を考えて，

$$P(R_1) = \frac{1}{2}\cdot\frac{4}{5} + \frac{1}{2}\cdot\frac{3}{5} = \frac{7}{10}$$

となる。さらに，第一の箱から赤玉が取り出されて，かつ第二の箱から赤玉が取り出される確率 $P(R_1 \cap R_2)$ は，これも第一の箱が A，B それぞれの場合を考えて，

$$P(R_1 \cap R_2) = \frac{1}{2}\cdot\frac{4}{5}\cdot\frac{3}{5} + \frac{1}{2}\cdot\frac{3}{5}\cdot\frac{4}{5} = \frac{12}{25}$$

となる。求める確率は $P_{R_1}(R_2)$ だから

$$P_{R_1}(R_2) = \frac{P(R_1 \cap R_2)}{P(R_1)} = \frac{\frac{12}{25}}{\frac{7}{10}} = \frac{24}{35}$$

である。

受　験　番　号

小　　計

数　　学 そ の １
工 学 部

令和６年度入学者選抜試験　答案用紙　（数学Ⅰ・A・Ⅱ・B・Ⅲその２ ）

2

(1) 問題文の条件から，$\overrightarrow{\mathrm{OD}} = \dfrac{2\vec{a}+\vec{b}}{3}$，$\overrightarrow{\mathrm{OE}} = \dfrac{\vec{b}+3\vec{c}}{4}$ である。$\mathrm{AF}:\mathrm{FE} = s:(1-s)$ とすると，

$$\overrightarrow{\mathrm{OF}} = (1-s)\vec{a} + s\cdot\frac{\vec{b}+3\vec{c}}{4} = (1-s)\vec{a} + \frac{1}{4}s\vec{b} + \frac{3}{4}s\vec{c}$$

と表される。また，$\mathrm{DF}:\mathrm{FC} = t:(1-t)$ とすると，

$$\overrightarrow{\mathrm{OF}} = t\vec{c} + (1-t)\cdot\frac{2\vec{a}+\vec{b}}{3} = \frac{2}{3}(1-t)\vec{a} + \frac{1}{3}(1-t)\vec{b} + t\vec{c}$$

と表される。このとき O, A, B, C は同一平面上にないので，

$$1-s = \frac{2}{3}(1-t),\quad \frac{1}{4}s = \frac{1}{3}(1-t),\quad \frac{3}{4}s = t$$

である。これらより，$s = \dfrac{2}{3}$，$t = \dfrac{1}{2}$ を得る。よって，

$$\overrightarrow{\mathrm{OF}} = \frac{1}{3}\vec{a} + \frac{1}{6}\vec{b} + \frac{1}{2}\vec{c}$$

となる。$|\vec{a}| = |\vec{b}| = |\vec{c}| = 2$，$\vec{a}\cdot\vec{b} = |\vec{a}||\vec{b}|\cos\dfrac{\pi}{3} = 2 = \vec{b}\cdot\vec{c} = \vec{c}\cdot\vec{a}$ であるから，

$$|\overrightarrow{\mathrm{OF}}|^2 = \frac{1}{36}(4|\vec{a}|^2 + |\vec{b}|^2 + 9|\vec{c}|^2 + 4\vec{a}\cdot\vec{b} + 6\vec{b}\cdot\vec{c} + 12\vec{c}\cdot\vec{a}) = \frac{1}{36}(4\cdot4+4+9\cdot4+4\cdot2+6\cdot2+12\cdot2) = \frac{25}{9}$$

となり，$|\overrightarrow{\mathrm{OF}}| = \dfrac{5}{3}$ を得る。

(2)　$\angle\mathrm{AOF} = \theta$ とすると，$\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OF}} = |\overrightarrow{\mathrm{OA}}||\overrightarrow{\mathrm{OF}}|\cos\theta = 2\times\dfrac{5}{3}\cos\theta$ であり，また $\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OF}} = \vec{a}\cdot\left(\dfrac{1}{3}\vec{a} + \dfrac{1}{6}\vec{b} + \dfrac{1}{2}\vec{c}\right) = \dfrac{1}{3}|\vec{a}|^2 + \dfrac{1}{6}\vec{a}\cdot\vec{b} + \dfrac{1}{2}\vec{a}\cdot\vec{c} = \dfrac{4}{3} + \dfrac{1}{3} + 1 = \dfrac{8}{3}$ であるから，$\dfrac{10}{3}\cos\theta = \dfrac{8}{3}$ より $\cos\theta = \dfrac{4}{5}$ を得る。ゆえに $\sin\theta = \dfrac{3}{5}$ なので，

$$S = \frac{1}{2}|\overrightarrow{\mathrm{OA}}||\overrightarrow{\mathrm{OF}}|\sin\theta = \frac{1}{2}\times2\times\frac{5}{3}\times\frac{3}{5} = 1$$

である。

(3)　$\overrightarrow{\mathrm{OM}} = \dfrac{1}{2}\vec{a}$，$\overrightarrow{\mathrm{OP}} = x\vec{b}$，$\overrightarrow{\mathrm{OQ}} = y\vec{c}$ とする。

$$\overrightarrow{\mathrm{OG}} = \frac{1}{3}(\overrightarrow{\mathrm{OM}} + \overrightarrow{\mathrm{OP}} + \overrightarrow{\mathrm{OQ}}) = \frac{1}{3}\left(\frac{1}{2}\vec{a} + x\vec{b} + y\vec{c}\right)$$

であり，G が直線 OF 上にあることから，定数 k が存在して，

$$\overrightarrow{\mathrm{OG}} = k\overrightarrow{\mathrm{OF}} = k\left(\frac{1}{3}\vec{a} + \frac{1}{6}\vec{b} + \frac{1}{2}\vec{c}\right)$$

である。よって，$\dfrac{1}{6} = \dfrac{1}{3}k$，$\dfrac{1}{3}x = \dfrac{1}{6}k$，$\dfrac{1}{3}y = \dfrac{1}{2}k$ から，$x = \dfrac{1}{4}$，$y = \dfrac{3}{4}$ を得る。ゆえに $\overrightarrow{\mathrm{OG}} = \dfrac{1}{6}\vec{a} + \dfrac{1}{12}\vec{b} + \dfrac{1}{4}\vec{c}$ となる。

このとき，$k = \dfrac{1}{2}$ であるので，G は線分 OF の中点である。ゆえに $\triangle\mathrm{OMG}$ と $\triangle\mathrm{OAF}$ は相似であり，相似比は $1:2$ である。よって面積比は $1:4$ なので，(2) から $S' = \dfrac{1}{4}$ である。

受　験　番　号

小　　計

数　　学その２
工学部

令和６年度入学者選抜試験　答案用紙　（数学Ⅰ・A・Ⅱ・B・Ⅲその３ ）

3

(1) 直線 PQ の方程式は $\dfrac{\cos\theta}{3}x+\dfrac{\sin\theta}{2}y=1$

$0<\theta<\dfrac{\pi}{2}$ のとき $\sin\theta\neq 0$ なので $y=-\dfrac{2\cos\theta}{3\sin\theta}x+\dfrac{2}{\sin\theta}$

曲線 C の式に代入して整理すると

$$\frac{1}{9}x^2-\frac{2}{3}\cdot\cos\theta\cdot x+\cos^2\theta=0$$

この 2 次方程式の判別式は

$$\left(-\frac{2}{3}\cdot\cos\theta\right)^2-4\cdot\frac{1}{9}\cdot\cos^2\theta=0$$

となるので曲線 C と直線 PQ は接する。

(2) △OPQ の面積は $\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{3}{\cos\theta}\cdot\dfrac{2}{\sin\theta}=\dfrac{6}{\sin 2\theta}$ となる。よって $\sin 2\theta$ が最大のとき △OPQ の面積は最小となる。

$0<\theta<\dfrac{\pi}{2}$ のとき $0<\sin 2\theta\leqq 1$ だから，$\sin 2\theta=1$ すなわち $\theta=\dfrac{\pi}{4}$ のとき △OPQ の面積は最小となる。

(3) $\theta=\dfrac{\pi}{4}$ のとき $x=3\cos\theta=\dfrac{3}{\sqrt{2}}$ となる。$y\geqq 0$ のとき曲線 C の式は $y=2\sqrt{1-\dfrac{x^2}{9}}$ と書けるので D の面積を S とすると

$$S=2\int_0^{\frac{3}{\sqrt{2}}}\sqrt{1-\frac{x^2}{9}}dx$$

$\dfrac{x}{3}=\sin u$ とおくと，$\dfrac{dx}{du}=3\cos u$，$x:0\to\dfrac{3}{\sqrt{2}}$ のとき，$u:0\to\dfrac{\pi}{4}$

これより，

$$S=2\cdot 3\int_0^{\frac{\pi}{4}}\sqrt{1-\sin^2 u}\,\cos u\,du=6\int_0^{\frac{\pi}{4}}\cos^2 u\,du=3\int_0^{\frac{\pi}{4}}(1+\cos 2u)\,du=3\left[u+\frac{1}{2}\sin 2u\right]_0^{\frac{\pi}{4}}=3\left(\frac{\pi}{4}+\frac{1}{2}\right)$$

(4)

$$V=\pi\int_0^{\frac{3}{\sqrt{2}}}\left(2\sqrt{1-\frac{x^2}{9}}\right)^2dx=4\pi\int_0^{\frac{3}{\sqrt{2}}}\left(1-\frac{x^2}{9}\right)dx=4\pi\left[x-\frac{x^3}{27}\right]_0^{\frac{3}{\sqrt{2}}}=4\pi\left(\frac{3}{\sqrt{2}}-\frac{1}{27}\cdot\frac{27}{2\sqrt{2}}\right)=5\sqrt{2}\pi$$

数　　学　そ　の　3
工　学　部

受　験　番　号

小　　計

令和６年度入学者選抜試験　答案用紙　（数学Ⅰ・Ａ・Ⅱ・Ｂ・Ⅲその４ ）

４

$x=t$ における接線の方程式は,

$$y-(1+\tan t)=\frac{1}{\cos^2 t}(x-t)$$

である。これより，接線と x 軸との交点の x 座標は,

$$x=f(t)=t-(1+\tan t)\cos^2 t=t-\cos^2 t-\sin t\cos t$$

である。この関数の増減を調べる。$f(t)$ を微分すると，

$$\begin{aligned} f'(t) &= 1+2\cos t\sin t-\cos^2 t+\sin^2 t=1+\sin 2t-\cos 2t \\ &= 1+\sqrt{2}\sin\left(2t-\frac{\pi}{4}\right) \end{aligned}$$

である。
$-\frac{\pi}{2}<t<\frac{\pi}{2}$ より，$-\frac{5\pi}{4}<2t-\frac{\pi}{4}<\frac{3\pi}{4}$ であるから，$f'(t)=0$ すなわち $\sin\left(2t-\frac{\pi}{4}\right)=-\frac{1}{\sqrt{2}}$ となるのは $2t-\frac{\pi}{4}=-\frac{3\pi}{4}$, $-\frac{\pi}{4}$ すなわち $t=-\frac{\pi}{4}$, 0 のときで，増減表は以下の通りとなる。

t	$-\frac{\pi}{2}$	$\cdots$	$-\frac{\pi}{4}$	$\cdots$	0	$\cdots$	$\frac{\pi}{2}$
$f'(t)$	／	$+$	0	$-$	0	$+$	／
$f(t)$	／	↗	$-\frac{\pi}{4}$	↘	-1	↗	／

$f(t)$ は，$t=-\frac{\pi}{4}$ のとき極大値 $-\frac{\pi}{4}$ をとり，$t=0$ のとき極小値 -1 をとる。

受　験　番　号

小　　　計

数　　学　そ　の　４
工　学　部